Cours de mathématiques financières (SEG – S2)

Pr. Wafia NOKAIRI

2018-2019

Objectifs généraux du cours

Maîtriser les différentes techniques mathématiques permettant de :

Traiter des phénomènes régissant les marchés financiers, tel que les calculs relatifs aux:

- taux d'intérêt
- annuités
- emprunts

Les supports pédagogiques:

- Présentation power point;
- Exercices;

Introduction générale

- Les mathématiques financières ou mathématiques appliquées à la finance sont indispensables à la compréhension du calcul des banquiers lors d'un recours à:
    - un emprunt ou
    - à un placement de l'argent.

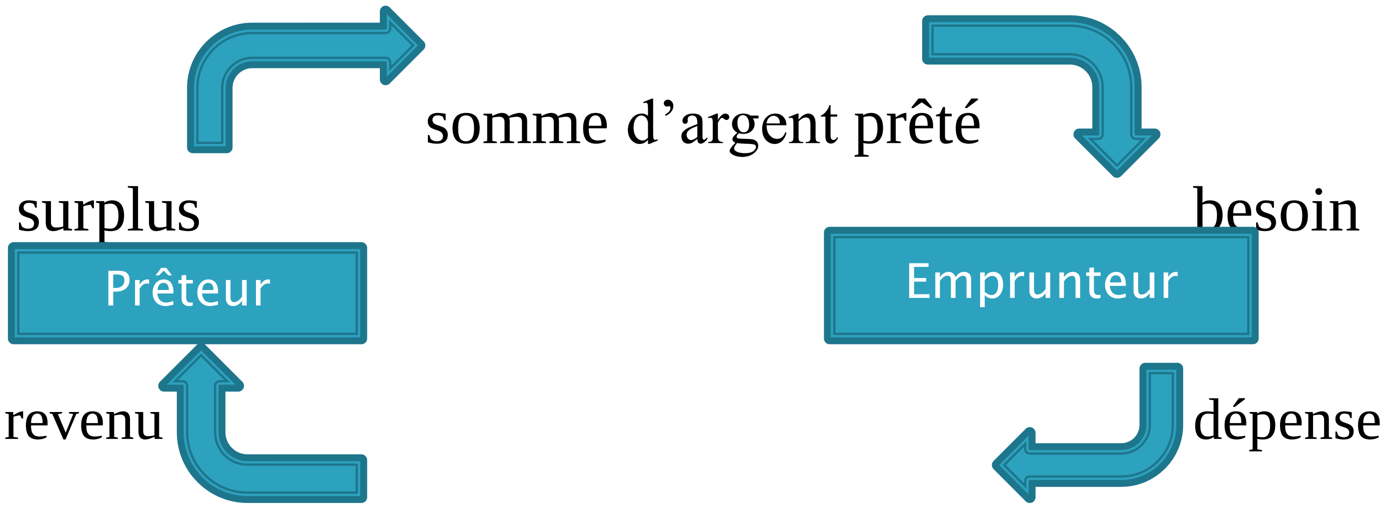
- Le but de ce cours est de présenter les calculs mathématiques les plus liés aux pratiques financières courantes.

Mathématiques financières

Généralités

L’intérêt:

L’intérêt est le prix payé par l’emprunteur au prêteur pour utiliser un capital pendant une durée donnée.



somme d’argent rendue + **intérêts**

C’est le loyer de la somme prêtée. Il s’agit d’une dépense pour l’emprunteur et d’un revenu pour le prêteur

L'intérêt:

On prête C unités monétaires (dirhams, euros, dollars,...) pour une durée déterminée 'd'.

Au bout de la durée fixée, l'emprunteur rembourse au prêteur une somme S.

L'intérêt I est la différence entre S et C :

$$I = S - C$$

Variation de l’intérêt:

L’intérêt est variable selon :

- La loi de l’offre et de la demande,
- Du montant du prêt, de la durée et du taux d’intérêt,
- Du degré de confiance que les prêteurs accordent aux emprunteurs.

L’habitude est d’exprimer le taux d’intérêt en pourcentage (%) pour la période (an, semestre, trimestre, etc.) considérée.

A savoir:

t% d’un nombre s’obtient en multipliant ce nombre par : t / 100.

Le taux d’intérêt:

Pour pouvoir effectuer des comparaisons, il est courant que l’intérêt s’exprime par une valeur de base appelée taux d’intérêt.

Le taux d’intérêt, noté i, est l’intérêt rapporté par une unité monétaire placé pendant une unité de temps (période).

Notons I l’intérêt rapporté par un capital C placé pendant une période.

Ainsi : $\mathbf{I = C \times i}$

Le taux d'intérêt:

Le taux d'intérêt annuel est celui produit par un capital placé pendant un an : (exemple : après avoir placé 100 dh pendant un an, on récupère 113 dh, alors le taux d'intérêt ou le taux de placement annuel est 0,13 ou 13%).

On doit distinguer entre :

- Un intérêt simple, généralement utilisé pour les placements à CT (<1 an) et,
- Un intérêt composé, généralement utilisé pour les placements à LT (>1 an)

Les deux se calculent sur les mêmes bases, à savoir le montant du capital, la durée et le taux d'intérêt mais la méthode de calcul est différente pour les deux types d'intérêt.

Le taux d'intérêt:

Pour la suite du raisonnement, on utilisera les symboles mathématiques suivants :

C_t : le montant du capital à l'instant t

I : le montant d'intérêt

i : le taux d'intérêt

n : le nombre de période de placement

La valeur nominale

La valeur nominale d'un capital est celle retenue à une date déterminée choisie comme origine des temps.

Cette valeur doit obligatoirement être associé à une date d'origine $t_{0.}$

La valeur acquise

La valeur acquise par un capital est la valeur nominale augmentée des intérêts acquis pendant le temps couru au-delà de la date choisie comme origine des temps.

X= valeur nominale

Y = valeur acquise

Y = x + intérêt

La valeur actuelle

La valeur actuelle d'un capital, au contraire, se détermine avant sa date d'échéance. L'intérêt qu'il convient de retrancher de la valeur nominale prend le nom d'escompte.

Types d'intérêt

Trois facteurs essentiels déterminent le coût de l'intérêt :

- la somme prêtée
- la durée du prêt
- le taux auquel cette somme est prêtée.

Dans ce qui suit, nous aborderons deux types d'intérêt :

- Intérêts simples
- Intérêts composés.

Plan du cours

Chap. I: Les intérêts simples

Chap. II: Escompte commercial à intérêt simple

Chap. III: Les intérêts composés

Chap. IV: Les annuités

Chap. V: Les emprunts

Chap. I : les intérêts simples

Les intérêts simples

Les questions traités dans cette partie concernent les opérations financières à court terme : celles dont la durée normale n'excède pas un an.

Pour ce type d'opérations la pratique normale est celle d'intérêt simple.

1.1: définition des intérêts simples

En cas d'intérêt simple, le capital reste invariable pendant toute la durée du prêt. L'emprunteur doit verser, à la fin de chaque période, l'intérêt dû.

Donc, même si la période est un peu longue ('n' années par exemple), les intérêts produits par le placement sont calculés à la fin de chaque période.

1.1: définition des intérêts simples

Dans un calcul à intérêts simples, les intérêts produits au cours d'une période ne sont pas capitalisés (ne produisent pas d'intérêts) au cours des périodes suivantes.

Dans ce cas, **le capital initial reste constant** et produit les **mêmes intérêts à chaque période.**

Les intérêts simples, produits sur une durée de placement, sont directement proportionnels:

- au montant du capital placé,
- à la durée du placement du capital,
- au taux d'intérêt périodique.

1.2: Calcul de l'intérêt simple

Soit :

C : le capital placé,

I : l'intérêt simple rapporté par le capital,

n : le nombre de périodes de placement,

i : taux d'intérêt périodique.

La formule de calcul de l'intérêt sur n périodes est la suivante :

$$\mathbf{I = C \times i \times n}$$

Si le taux d'intérêt i est exprimé en pourcentage i = t %, alors :

$$\mathbf{I = \frac{C \times t \times n}{100}}$$

1.2: Calcul de l’intérêt simple

La durée de placement étant exprimée en années, la formule de calcul de l’intérêt est la suivante :

I : l’intérêt simple rapporté par le capital,

C : le capital placé,

n : le nombre d’années de placement,

t% : taux d’intérêt annuel

On a:

$$\mathbf{I = \frac{C \times t \times n}{100}}$$

1.2: Calcul de l’intérêt simple

- Dans la pratique et pour des raisons de simplification, l’intérêt est calculé en fonction du nombre de jours de placement.

- La formule relative au calcul de l’intérêt simple pour une période ‘n’ en années est peu utilisé car l’intérêt simple se calcule surtout pour des durées inférieures à l’année.

- Les formules de calcul de l’intérêt simple pour des durées comptées en ‘m’ mois ou en ‘j’ jours se présentent comme suit:

N.B. : L’année est prise pour 360 jours et les mois sont comptés pour leur nombre de jours exacts.

1.2: Calcul de l'intérêt simple

La formule de calcul devient: (taux d'intérêt exprimé en %)

- C 'dhs' en 'j' jours rapportent un intérêt : $I = \dfrac{\mathbf{C \times t \times j}}{\mathbf{36000}}$

- C 'dhs' en 'm' mois rapportent un intérêt : $I = \dfrac{\mathbf{C \times t \times m}}{\mathbf{1200}}$

- C 'dhs' en 'n' années rapportent un intérêt : $I = \dfrac{\mathbf{C \times t \times n}}{\mathbf{100}}$

1.2: Calcul de l'intérêt simple

Si on utilise : $i = t / 100$ ⟹ i = le taux d'intérêt pour 1 dh de placement.

La formule de calcul devient:

- C 'dhs' en 'j' jours rapportent un intérêt : $I = \dfrac{\mathbf{C \times i \times j}}{\mathbf{360}}$
- C 'dhs' en 'm' mois rapportent un intérêt : $I = \dfrac{\mathbf{C \times i \times m}}{\mathbf{12}}$
- C 'dhs' en 'n' années rapportent un intérêt : $I = \mathbf{C \times i \times n}$

1.3: la valeur acquise d'un capital

La valeur définitive (acquise) du capital C après n période de placement est la somme du capital et des intérêts gagnés.

Si nous désignons par VA: la valeur acquise, alors:

$$\mathbf{VA = C + I = C + \frac{C*t*n}{100} = C\left(1+ \frac{t*n}{100}\right)}$$

1.4: Taux moyen de placement:

Considérons deux capitaux C_1 et C_2 engagés respectivement pendant n_1 et n_2 à des taux t_1 et t_2.

L'intérêt total produit par les 2 capitaux est égal à la somme des intérêts simples produits par chaque capital:

$$I = \frac{C_1 * t_1 * n_1}{100} + \frac{C_2 * t_2 * n_2}{100} = \frac{C_1 * t_1 * n_1 + C_2 * t_2 * n_2}{100}$$

1.4: Taux moyen de placement:

Le taux d'intérêt moyen 't_{moy}' est celui appliqué aux deux capitaux pendant les durées n_1 et n_2 et qui donne le même intérêt I:

$$I = \frac{C_1 * t_{moy} * n_1 + C_2 * t_{moy} * n_2}{100}$$

Avec:

$$C_1 * t_{moy} * n_1 + C_2 * t_{moy} * n_2 = C_1 * t_1 * n_1 + C_2 * t_2 * n_2$$

1.4: Taux moyen de placement:

Pour une période en année: $$t_{moy} = \frac{C_1*t_1*n_1 + C_2*t_2*n_2}{C_1 * n_1 + C_2*n_2}$$

Pour une période en mois: $$t_{moy} = \frac{C_1*t_1*m_1 + C_2*t_2*m_2}{C_1 * m_1 + C_2*m_2}$$

Pour une période en jours: $$t_{moy} = \frac{C_1*t_1*j_1 + C_2*t_2*j_2}{C_1 * j_1 + C_2*j_2}$$

1.5: Différents taux d'intérêt

A. **Taux effectif de placement pour intérêt précompté;**

B. **Taux d'intérêt réel.**

A: taux effectif de placement pour intérêt précompté:

Il existe 2 manières de paiement des intérêts : soit

- **Par un seul versement lors du remboursement final du prêt. « On dit que l'intérêt est post-compté »;**

- **par avance au moment du versement du capital (paiement des intérêts le jour de la conclusion du contrat du prêt). « le prêt est dit, prêt à intérêt précompté à la date de la souscription » Ex.: les bons de trésor…**

A: taux effectif de placement pour intérêt précompté:

Dans le deuxième cas, l'emprunteur paie un intérêt un peu plus élevé, appelé: taux effectif de placement.

Exemple: un bon d'une valeur nominale de 5000 dh échéant dans 2 ans se vend à 4000 dh. Calculez le taux d'intérêt nominal et le taux effectif de placement.

Le taux nominal est le taux conventionnel (taux annoncé):

Soit t ce taux annoncé, alors:

$$5000*t*2 / 100 = 1000 \text{ dh} \Longrightarrow t = 10\%$$

A: taux effectif de placement pour intérêt précompté:

Or, le rendement annuel réalisé sur ce placement est le taux effectif de placement qu'on note (t_e), tel que:

$$t_e = I * 100 / C' * n$$

$$t_e = 1000 * 100 / 4000 * 2$$

$$t_e = 12{,}5\ \% \text{ ou } i_e = 0{,}125$$

A: taux effectif de placement pour intérêt précompté:

Pour l'emprunteur, puisque l'intérêt est précompté, le capital effectivement emprunté est:

$$C' = C - I = C - \frac{C*n*t}{36000} = C * \frac{36000 - n*t}{36000}$$

Le taux effectif payé par l'emprunteur est donc:

$$t_e = \frac{36000 * I}{n*C'} = \frac{36000 * \frac{C*n*t}{36000}}{C * n * \frac{36000 - n*t}{36000}}$$

A: taux effectif de placement pour intérêt précompté:

Donc, le taux effectif est égale à:

$$t_e = \frac{36000 * ta}{36000 - n*ta}$$

Si la durée est exprimée en mois, cette formule devient:

$$t_e = \frac{1200 * ta}{1200 - n*ta}$$

A: taux effectif de placement pour intérêt précompté:

__Exemple__ **1:**

Quel est le taux effectif correspondant à un taux d'intérêt précompté de 10% pendant une durée de placement de 6 mois?

$$t_e = \frac{1200 * t}{1200 - n*t}$$

__Exemple__ **2:**

Calculer le taux annoncé d'un prêt à intérêt précompté, octroyé pendant 150 jours, dont le taux effectif est de 8%.

$$t_a = \frac{36000 * t_e}{36000 + n * t_e}$$

B: taux d'intérêt réel

La banque, lors de l'octroi d'un prêt, facture certains frais (frais d'ouverture de dossier,…). Dans ce cas, l'emprunteur paie un taux d'intérêt réel supérieur au taux annoncé.

Donc, prenons un capital C prêté pendant 'n' jours, à un taux d'intérêt annoncé t_a et que les frais facturés par la banque sont f, le taux réel t_r se calcule comme suit:

$$t_r = \frac{36000 * I}{C' * n} \qquad \text{avec} \qquad C' = C - f$$

Ce qui donne : $t_r = \frac{C * t_a}{C - f}$

B: taux d'intérêt réel

Exemple 1:

Quel est le taux d'intérêt réel d'un prêt de 10.000 dh, accordé pendant 75j, au taux annoncé de 7%, si les frais retenus par l banque s'élèvent à 150 dh?

$$t_r = \frac{C * t_a}{C - f}$$

Exemple 2:

Quels sont les frais que facture la banque si, lors de l'octroi d'un prêt de 25.000 dh, le taux annoncé et le taux réel sont respectivement: 7% et 7,05% ?

$$f = \frac{C * (t_r - t_a)}{t_r}$$

Récapitulons:

1. **Le calcul de l'intérêt simple**
2. **La valeur acquise d'un capital**
3. **Le taux moyen de placement**
4. **Les différents taux d'intérêt**
   - **taux effectif de placement pour intérêt précompté**
   - **taux d'intérêt réel**

Chapitre II :
l’escompte à intérêt simple

1. Définition de l'effet de commerce :

Un effet de commerce est un document par lequel un débiteur (client) reconnaît vis-à-vis d'un créancier (fournisseur), une dette exigible à une date donnée.

Si le fournisseur a besoin d'argent, avant la date d'échéance, il demande une avance à sa banque, garantie par la créance qu'il possède. Moyennant un document écrit qui justifie l'existence de cette créance : effet de commerce.

Définition de l'effet de commerce :

Il peut prendre 2 formes:

Le client (débiteur), rédige un papier où il promet de payer à son fournisseur (le créancier) le montant 'M', à la date d'échéance (billet à ordre);

Le débiteur peut uniquement apposer sa signature sur un papier rédigé par le créancier reconnaissant ainsi l'existence de la dette (lettre de change ou traite).

1. L'escompte commercial:

L'escompte commercial est l'intérêt produit par la valeur nominale de l'effet, à un taux d'intérêt simple (taux d'escompte), pendant la durée qui sépare la date de remise à l'escompte et la date d'échéance.

Calcul d’escompte

Soit:

- **‘Vn’ : la valeur nominale de l’effet, valeur inscrite sur l’effet et payable à échéance;**
- **‘N’ : la durée qui sépare la date de remise de l’effet à l’escompte et l’échéance de l’effet. (Durée d’escompte);**
- **‘t’ : le taux d’escompte;**
- **‘E’ : Escompte commercial produit par l’effet de commerce.**

Donc:

$$E = \frac{V * N * t}{36000}$$

Calcul d'escompte

<u>Exemple 1:</u>

Calculer l'escompte produit par un effet de commerce d'une valeur nominale de 40.000 dh dont l'échéance est le 30 novembre, s'il est remis à l'escompte le 5 octobre de la même année au taux d'escompte de 12%.

La durée d'escompte est : 56 jours.

L'escompte commercial produit par cet effet de commerce est:

$$E = (56 * 40.000 * 0,12) \ / \ 360 = 746,67 \text{ dh}$$

Donc, si le créancier a besoin de son argent le 5 octobre, il doit payer à la banque 746,67 dh et ne recevra que:

$$40.000 – 746,67 = 39.253,33 \text{ dh}$$

2. Valeur actuelle commerciale

La banque remet au client la différence entre la valeur nominale de l'effet et l'escompte.

$$\text{(Valeur actuelle)} : Va = Vn - E$$

$$\Rightarrow \quad Va = Vn - \frac{Vn*n*t}{36000} = Vn\left(1 - \frac{n*t}{36000}\right)$$

2. Valeur actuelle commerciale

Exemple 1:

Calculer la Va d’un effet de commerce de Vn = 15.000 dh, d’échéance le 15 juin s’il est remis à l’escompte le 13 avril de la même année au taux d’escompte de 9%.

Il y a 63 jours entre le 13 avril et le 15 juin.

Donc: $Va = Vn\,(1 - n*i/360) = 15.000\,(1 - 63 * 0,09/360)$

$= 14.763,75$ **dh**

2. Valeur actuelle commerciale

<u>Exemple 2:</u>

Calculer la Vn d'un effet dont la durée d'escompte est 35 j, le taux d'escompte 8% et la valeur à la date de remise à l'escompte est de 25.000 dh.

$$Vn = 360 * Va / \ 360 – n * t = 360 * 25.000 / 360 – 35*0,08$$

$$= 25.195,97$$

3. Valeur nette commerciale

- **Dans la pratique, la remise d'un effet à l'escompte entraîne d'autres frais financiers, en plus de l'escompte.**

- **Ces frais comprennent plusieurs commissions : (commissions de courrier, …) et la TVA.**

- **La somme de l'escompte et des commissions s'appelle l'agio (HT), auquel on applique un taux de TVA pour avoir les agios TTC.**

3. Valeur nette commerciale

- **AGIOS TTC = AGIOS HT * (1 + Taux de TVA)**

- **AGIOS HT = ESCOMPTE + COMMISSIONS**

- **AGIOS TTC = (ESCOMPTE + COMMISSIONS) * (1+taux de TVA)**

Donc : la <u>Valeur Nette = Vn – agios TTC</u>

- **<u>N.B: </u>il est à noter que la durée réelle de l'escompte est parfois majorée d'un ou de plusieurs jours (appelés jours de banque)**

3. Valeur nette commerciale

<u>EXEMPLE 1:</u>

Soit un effet de commerce de 35.500 dh échéant le 27 juillet 2005 et escompté le 10 avril de la même année, aux conditions suivantes:

- **Taux d'escompte : 13%**
- **Commission de manipulation : 2 dh par effet**
- **TVA : 10%**
- **Tenir compte d'un jour de banque**

Calculer la Valeur nette de l'effet

E = (35.500 * 109 * 13) / 36000 = 1397,32 + 2dh = 1399,32 dh

Agios TTC = 1399,32 + 139,93 (TVA) = 1539,25 dh

3. Valeur nette commerciale

La valeur nette est la somme effectivement mise à la disposition du vendeur de l'effet de commerce avant son échéance.

V nette = Vn – agios TTC

= 35.500 – 1539,25

= 33.960,75 dh

3. Valeur nette commerciale

<u>Exemple 2:</u>

Quelle est la valeur nette commerciale de 4 effets qu'une entreprise remet à l'escompte le 10 mars, avec les informations suivantes:

- **15.000 dh à échéance le 15 mai de la même année;**
- **16.000 dh à échéance le 20 juin de la même année;**
- **10.000 dh à échéance le 12 juillet de la même année;**
- **22.000 dh à échéance le 24 septembre de la même année.**

Les conditions d'escompte sont:

- **Taux d'escompte = 14%;**
- **Commission de service = 10 dh par effet;**
- **Compter 1 jour de banque supplémentaire;**
- **Taux de TVA = 10%**

3. Valeur nette commerciale

Le bordereau d'escompte se présente comme suit:

Valeur nominale	Durée d'escompte	Escompte
15 000 dh 16 000 dh 10 000 dh 22 000 dh	67 j 103 j 125 j 199 j	390,83 dh 640,89 dh 486,11 dh 1702,55 dh
63 000 dh	**Total escompte**	**3220,38 dh**
	Total commissions (4 effets) Agios HT TVA (10%)	40,00 dh 3260,38 dh 326,04 dh
	Agios TTC	**3586,42 dh**
Valeur nette commerciale		**59 413,58 dh**

4. Taux relatifs à l’opération d’escompte

4.1 : taux réel d’escompte (tr)

4.2 : taux de revient (t_{re})

4.3 : taux de placement (t_p)

4.1 : taux réel d'escompte

En tenant compte de l'ensemble de ce qui est retenu par la banque (agios TTC), pendant la durée réelle d'escompte; le taux réel (tr) pratiqué par la banque se trouve donc majoré:

$$\text{Agios} = \frac{Vn * tr * j}{36000} \Longrightarrow tr = \frac{\text{agios} * 36000}{Vn * j}$$

'tr' est le taux d'opération en elle-même, il est calculé en tenant compte du montant global de l'agio et de la durée réelle de l'escompte.

Ce taux est supérieur au taux d'escompte annoncé t.

4.1 : taux réel d’escompte

Exemple:

Considérons un effet de commerce d’une Valeur nominale de 40.000 dh d’échéance le 30 novembre et remis à l’escompte le 5 octobre de la même année aux conditions suivantes:

- **Taux d’escompte : 12%**
- **commissions: : 10 dh**
- **Tenir compte d’un jour de banque**
- **Taux de TVA : 10%**

Calculer le taux réel d’escompte

4.1 : taux réel d'escompte

E = 57 * 40.000 * 0,12 / 360 = 760 dh

Agios HT = 760 + 10 = 770 dh

Agios TTC = 770 + 77 = 847 dh

Vnette = 40.000 – 847 = 39.153 dh

Le taux réel d'escompte tr est:

$$tr = \frac{360 * \text{Agios TTC}}{Vn * j} = \frac{360 * 847}{40.000 * 56} = 13{,}61\ \%$$

4.2 : Taux de revient (t_{re})

- C'est le taux de revient pour l'entreprise (c'est le coût réel de cette opération payé par celle-ci).

- Il dépend de la valeur effectivement prêtée (valeur nette), de l'agio global et de la durée réelle.

$$t_{re} = \frac{\text{agio} * 36000}{\text{valeur nette} * \text{durée réelle}}$$

4.2 : Taux de revient (t_{re})

Exemple:

Considérons un effet de commerce d'une Vn de 40.000 dh, d'échéance le 30 novembre et remis à l'escompte le 5 octobre de la même année aux conditions suivantes:

- **Taux d'escompte : 12%**
- **Commission : 10%**
- **Tenir compte d'un jour de banque**
- **Taux de TVA : 10%**

Calculer le taux de revient.

4.2 : Taux de revient (t_{re})

$$t_{re} = \frac{360 * \text{agios TTC}}{\text{V nette} * j}$$

$$= \frac{360 * 847}{39.153 * 56} = 13,91\%$$

4.3 : Taux de placement (t_p)

C'est le taux de placement pour la banque, il dépend de la somme effectivement prêté par la banque et du gain effectif qui en résulte.

$$t_p = \frac{\overbrace{(\text{agio HT} - \text{commissions de services})}^{\text{Escompte}} * 36000}{\text{Vnette} * \text{durée réelle}}$$

4.3 : Taux de placement (t_p)

La banque a effectué un placement effectif qui correspond à la valeur nette de l'effet;

L'intérêt produit par ce placement correspond uniquement à l'escompte commercial (E).

Le taux de placement (tp) = rendement réel réalisé par la banque pour cette opération.

4.3 : Taux de placement (t_p)

<u>Exemple:</u>

Considérons un effet de commerce d'une Vn de 40.000 dh, d'échéance le 30 novembre et remis à l'escompte le 5 octobre de la même année aux conditions suivantes:

- **Taux d'escompte : 12%**
- **Commission : 10 dh**
- **Tenir compte d'un jour de banque**
- **Taux de TVA : 10%**

Calculer le taux de placement.

4.3 : Taux de placement (t_p)

E = 760 dh

Agios HT = 770 dh

TVA = 77 dh

Agios TTC = 847 dh

Valeur nette = 39.153 dh

$$t_p = 360 * E / V\ nette * n = 12{,}48\%$$

$t = 12\% < t_p = 12{,}48\% < tr = 13{,}61\% < tre = 13{,}91\%$

Rendement réel de la banque

Coût réel de cette opération payé par le client

5. Equivalence d’effets

Principe général de l’équivalence:

Un créancier peut céder un effet de commerce à une banque avant sa date d’échéance	⇔	Un débiteur peut <u>rembourser une dette avant</u> son terme ou encore <u>repousser son échéance</u>

5. Equivalence d’effets

Le concept d’équivalence est appliqué dans une opération d’escompte lorsqu’il s’agit de remplacer:

- **Un effet de commerce par un autre effet;**
- **Un effet de commerce par plusieurs effets;**
- **Plusieurs effets par un seul effet.**

Cette opération de remplacement d’effets ne doit procurer aucun avantage ou inconvénient, ni à la banque ni au client.

5. Equivalence d'effets

5.1 : équivalence de deux effets

5.2 : équivalence de plusieurs effets : échéance commune

5.3 : cas particulier : échéance moyenne

5.1 : équivalence de deux effets

Deux effets sont équivalents à une <u>date déterminée</u>, si escomptés en même temps, ils ont la même valeur actuelle commerciale (valeur escomptée).

<u>La date d'équivalence</u>

<u>Supposons</u>:

Vn1 et Vn2 : les valeurs nominales de deux effets,

n1 et n2 jours: leurs échéances respectives,

t : taux d'escompte.

Ces deux effet sont dits équivalents, si : à leur date commune de la remise à l'escompte, leur valeur actuelle est égale.

5.1 : équivalence de deux effets

On aura donc:

$$Va1 = Va2 \iff Vn1 - E1 = Vn2 - E2$$

$$Vn1 - \frac{Vn1 * t * j1}{36000} = Vn2 - \frac{Vn2 * t * j2}{36000} \quad \text{(en jours)}$$

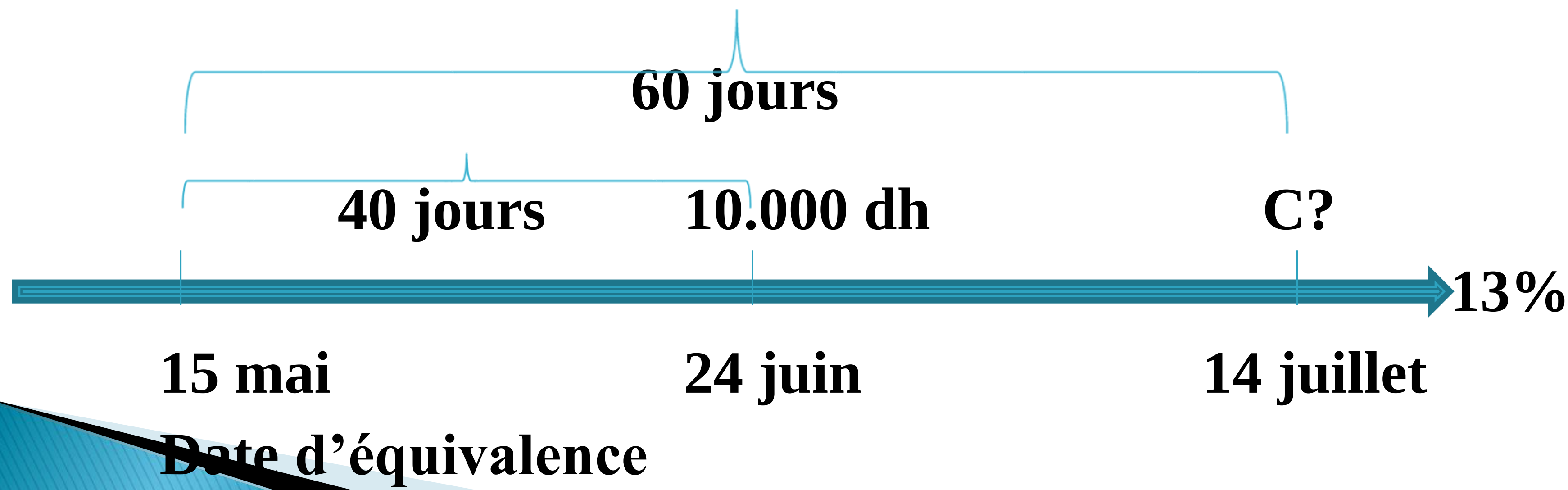
$$Vn1 - \frac{Vn1 * t * m1}{1200} = Vn2 - \frac{Vn2 * t * m2}{1200} \quad \text{(en mois)}$$

5.1 : équivalence de deux effets

Exemple:

Un commerçant souhaite remplacer le 15 mai un effet de 10.000 dh arrivant à échéance le 24 juin, par un autre échéant le 14 juillet.

Déterminer la valeur de l'effet de remplacement, sachant que le taux annuel d'intérêt est de 13%.



5.1 : équivalence de deux effets

Alors l'équivalence des deux effets au 15 mai est:

$$10.000 - \frac{10.000 * 13 * 40}{36.000} = Vn2 - \frac{Vn2 * 13 * 60}{36.000}$$

$$9.855,56 = Vn2\ (1 - 0,13 * 60 / 360)$$

$$Vn2 = 10.073,81 \text{ dh}$$

5.1 : équivalence de deux effets

Exemple 2:

Un débiteur désir remplacer un effet de valeur nominale 75.000 dh qu'il doit payer dans 60 jours par un autre effet de valeur nominale 74.600 dh.

Quelle serait l'échéance de cette nouvelle dette? (taux d'escompte est 13%)

J = 46 jours

5.1 : équivalence de deux effets

Exemple 3:

A quelle date un effet de valeur nominale de 20.000 dh à échéance du 15 avril est-il équivalent à un effet de 20.435,86 dh à échéance du 14 juin de la même année? (taux d'escompte 12,6%)

J = 44 jours

Donc 44 jours avant le 15 avril, soit le 2 mars de la même année.

5.2 : équivalence d'un effet avec plusieurs effets : échéance commune

- **L'échéance commune c'est le cas de remplacement de plusieurs effets par un seul effet.**

- **C'est l'échéance d'un effet unique qui, à la date d'équivalence , a une valeur actuelle égale à la somme des valeurs actuelles des effets remplacés.**

5.2 : équivalence d'un effet avec plusieurs effets : échéance commune

- **Exemple:**

On souhaite remplacer le 15 juin, les trois effets ci-dessous par un effet unique.

Effet	Valeur nominale	Échéance
E1	5.000	20 août
E2	4.000	15 juillet
E3	12.000	20 septembre

Quelle est l'échéance de l'effet de 21.200 dh remplaçant les effets E1, E2 et E3, avec un taux d'escompte de 13%?

j = 103 jours

L'échéance sera donc le 15 juin + 103 jours, soit: le 26/09

5.2 : équivalence d'un effet avec plusieurs effets : échéance commune

- **Exemple 2:**

Soit un effet de commerce E de valeur nominale Vn = 42.400 dh. Soient trois effets E1, E2 et E3:

Effet	Valeur nominale	Échéance
E1	10.000	10 avril
E2	8.000	5 mars
E3	24.000	10 mai

Le 5 février de la même année, les effets sont négociés au taux de 13%, quelle doit être la date d'échéance de l'effet unique pour qu'il soit équivalent aux trois autres effets?

5.3 : Cas particulier de l’échéance commune : l’échéance moyenne

- L’échéance moyenne de plusieurs effets est un cas particulier de l’échéance commune.

- On l’obtient lorsqu’on peut remplacer plusieurs effets, d’échéance différentes, par un effet unique dont la valeur nominale est égale à la somme des valeurs nominales de ces différents effets.

- L’échéance moyenne est donc l’échéance de l’effet unique.

5.3 : Cas particulier de l'échéance commune : l'échéance moyenne

- **Exemple:**

On souhaite remplacer le 15 juin, les trois effets ci-dessous par un effet unique de valeur nominale = 21.000 dh

Effet	Valeur nominale	Échéance
E1	5.000	20 août
E2	4.000	15 juillet
E3	12.000	20 septembre

Calculons l'échéance moyenne à partir de l'équation d'équivalence au 15 juin. (taux d'escompte = 13%)

5.3 : Cas particulier de l'échéance commune : l'échéance moyenne

- **Au 15 juin, l'équivalence s'écrit comme suit:**

$$21.000 - \frac{21.000 * j * 13}{36.000} = 3956,67 + 4880,83 + 11579,67$$

$$21.000 + 7,5833\, j = 20.417,17 \text{ dh}$$

$$j = 77 \text{ jours}$$

L'échéance moyenne est le 15 juin + 77 jours, soit le 31 août de la même année.

Chapitre III :
Les intérêts composés

1. Définition

- **Un capital est dit placé à intérêt composé lorsqu'à la fin de la première période, l'intérêt simple produit est ajouté au capital pour produire de l'intérêt simple sur le nouveau capital pendant la période suivante.**

- **On dit que l'intérêt est capitalisé.**

- **Les intérêts composés sont utilisés pour les opérations financières à moyen et long terme.**

1. Définition

Exemple:

Soit un capital de 10.000 dh placé à intérêts composés au taux annuel de 10% pour une durée de 3 ans.

Au bout d'une année, l'intérêt simple est :

$$I1 = 10.000 * 10\% = 1000 \text{ dh}$$

A la fin de la 1ère année, l'intérêt est ajouté au capital:

$$10.000 + 1000 = 11.000 \text{ dh}$$

On obtient donc un nouveau capital qui produira à son tour un intérêt simple au bout de la 2ème année:

$$I2 = 11.000 * 10\% = 1100 \text{ dh}$$

A la fin de la 2ème année, le nouveau capital est :

$$11.000 + 1100 = 12.100 \text{ dh}$$

1. Définition

A la fin de la $3^{ème}$ année, le nouveau capital est :

12.100 + 1210 = 13.310 dh

Il acquiert donc un intérêt = 13.310 – 10.000 = 3310 dh

Si le capital est placé à intérêt simple de 10%, il n'aurait acquis que :

(10.000 * 10 * 3) / 100 = 3000 dh

La différence émane de la capitalisation des intérêts.

Généralisons:

Un capital C placé pour n périodes au taux périodique t:

- Période 1: le Capital devient : $C+C*t = C(1+t)$
- Période 2 : $C(1+t) + C(1+t)*t = C(1+t)^2$
- Période 3 : $C(1+t)^2 + C(1+t)^2 * t = C(1+t)^3$

.

.

.

.

- Période n : le capital de vient : $C(1+t)^n$

2. Valeur acquise à intérêts composés

2.1 : le temps de placement est un nombre entier de périodes:

La valeur acquise Va ou Cn d'un capital, placé pendant n périodes au taux d'intérêt t est :

$$Va = Cn = C\,(1+t)^n$$

La somme totale des intérêts est :

$$I = C\,(1+t)^n - C = C\,[\,(1+t)^n - 1]$$

2. Valeur acquise à intérêts composés

Exemples

Calculez la valeur acquise d'un capital de 100.000 dh placé pendant 6 ans à 8% l'an (capitalisation annuelle).

$C_n = C_0\,(1+i)^n$

$= 100.000\,(1 + 0{,}08)^6$

$= 158.687{,}43$ dh

En intérêt simple : $Va = C_0 + C_0 * n * t/100$

$= 148.000$ dh

2. Valeur acquise à intérêts composés

Exemples

Calculez la valeur acquise d'un capital de 10.000 dh placé pendant 3 ans à intérêts composés au taux annuel de 7%.

$$C_n = C_0 (1+i)^n$$

$$= 10.000 (1 + 0,07)^3$$

$$= 12.250,43 \text{ dh}$$

Le montant des intérêts est: $I = 12.250,43 - 10.000$

$= 2.250,43$ dh

2. Valeur acquise à intérêts composés

2.2 : le temps de placement est un nombre fractionnaire de périodes:

Exemple:

Quelle est la valeur acquise au bout de 5 ans et 7 mois d'un capital de 100.000 dh placé à intérêts composés au taux annuel de 8% ?

Deux solutions sont possibles:

- **La solution rationnelle**
- **La solution commerciale**

La solution rationnelle:

- Dans ce cas, on considère que la Va au bout de 5 ans reste placer pendant 7 mois à intérêts simples.

$$C_{5+7/12} = \underbrace{100.000(1,08)^5}_{\substack{\textbf{valeur acquise} \\ \textbf{au bout de 5 ans}}} + [\underbrace{(100.000\ (1,08)^5 * 0,08*7/12}_{\substack{\textbf{Intérêts simples des 7} \\ \textbf{derniers mois}}}$$

$$C_{5\ +\ 7/12} = 100.000(1,08)^5 \ * (1 + 0,08*7/12)$$

$$= 153.789,67 \text{ dh}$$

La solution rationnelle:

En général, on peut écrire la formule suivante:

$$\mathbf{C_{k+p/q} = C\ (1+i)^k * (1+p/q*i)}$$

La solution commerciale:

On généralise la formule des intérêts composés:

$Cn = C\ (1+i)^n$ avec ‘n’ un nombre fractionnaire.

Ainsi, la solution commerciale est:

$$C_{5\ +\ 7/12} = 12.000\ (1,07)^{5+7/12}$$

$$= 12.000\ (1,07)^{67/12}$$

$$= 17.541,86 \text{ dh}$$

En général, la formule est la suivante:

$$\mathbf{C_{k\ +\ p/q} = C\ (1+i)^{k+p/q}}$$

La solution commerciale:

Reprenons l'exemple suivant:

Quelle est la valeur acquise au bout de 5 ans et 7 mois d'un capital de 100.000 dh placé à intérêts composés au taux annuel de 8% ?

$$C_{k + p/q} = C\,(1+i)^{k+p/q}$$

$$= 153.679{,}51 \text{ dh}$$

3. Calculs sur la formule fondamentale des I. C.

1. **<u>Calcul du taux:</u>**

On place 250.000 dh au bout de 5 ans, on se retrouve avec une Va de 340.000 dh. Trouver le taux de capitalisation annuelle.

On sait que: $Cn = C\ (1+i)^n$

$$340.000 = 250.000 * (1+i)^5$$

$$(1{,}36)^{1/5} = 1+i$$

$$i = 0{,}063427 \quad (\text{taux} = 6{,}34\%\ \text{l'an})$$

3. Calculs sur la formule fondamentale des I. C.

2. Une somme de 120.000 dh est placé pendant 7 ans au taux annuel 9%. Quelle est la Va à la fin de ce placement?

$$C^7 = 120.000\ (1{,}09)^7 = 120.000 * 1{,}828039$$

$$= 219.364{,}68 \text{ dh}$$

3. Calculs sur la formule fondamentale des I. C.

3.

Un capital de 100.000 dh est placé à I.C au taux annuel de 8%. A la fin du placement la Va s'élève à 233.163,90 dh.

Quelle est la durée du placement?

$$100.000\,(1{,}08)^n = 233.163{,}90 \text{ dh}$$

$$(1{,}08)^n = 2{,}331639$$

$$n = \frac{\text{Log } 2{,}331639}{\log(1{,}08)} = 11 \text{ ans}$$

3. Calculs sur la formule fondamentale des I. C.

4.

Au bout de combien de temps, une somme double-t-elle par capitalisation semestrielle et un taux de 3% le semestre?

$C_n = C_0 * (1+i)^n$ avec $C_n = 2*C_0$

Donc : $2*C_0 = C_0 * (1+i)^n$

$(1+i)^n = 2$

$\log (1+i)^n = \log 2$

$n * \log (1+i) = \log 2$

n = 11 ans et 8 mois et 21 jours

3. Calculs sur la formule fondamentale des I. C.

5. Un capital de 10.500 dh est placé à un taux annuel de 11,25%. Quelle est sa durée de placement pour qu'il acquiert une valeur de 11.578,09 dh?

$$Va = C\,(1+t)^n$$

$$(1+t)^n = Va / C$$

$$\text{Log}\,(1+t)^n = \log\,(Va/C)$$

$$n \log\,(1+t) = \log\,(Va/C)$$

$$n = \log(Va/C) \quad / \quad \log\,(1+t)$$

n = 0,9167 années = 11 mois

4. Valeur actuelle à I.C:

- **La valeur actuelle est la somme qu'il faut placer actuellement à I.C pour obtenir 'C_n' après 'n' période de placement.**

- **C'est le processus inverse de la capitalisation qui s'appelle actualisation.**

$$C_0 = C_n (1+i)^{-n}$$

4. Valeur actuelle à I.C:

Exemple:

Quelle somme faut-il placer maintenant à I.C au taux annuel de 7% pour obtenir dans 4 ans une valeur définitive de 75.000 dh?

$$C_0 = C_n\,(1+i)^{-n}$$

$$C_0 = 75.000 * (1+0,07)^{-4}$$

$$C_0 = 57.217,14 \text{ dh}$$

5. Taux proportionnels et taux équivalents:

5.1. Taux proportionnels:

Deux taux sont proportionnels lorsque leur rapport est égal au rapport des durées de leurs périodes respectives.

Exemple: au taux annuel de 10%, correspond le taux semestriel proportionnel de 5% et le taux trimestriel de 2,5%.

4. Taux proportionnels et taux équivalents:

4.1. Taux proportionnels:

Taux en %	Durée en mois	rapport
10/5	12/6	2
10/2,5	12/3	4

4. Taux proportionnels et taux équivalents:

4.1. Taux proportionnels:

Exercice 1:

Soit un capital de 25.000 dh placé au taux annuel d'I.C de 12% pendant une année. Calculez la valeur acquise par ce capital, au bout d'une année, en considérant les intérêts produits par an, par semestre, par trimestre et par mois avec des taux proportionnels.

4. Taux proportionnels et taux équivalents:

4.1. Taux proportionnels:

Corrigé :

Durées de capitalisation	Nombre de périodes	taux	Va au bout d'une année
Annuelle	1	12%	$25.000\,(1+0{,}12)^{1} = 28.000$ dh
Semestrielle	2	6%	$25.000\,(1+0{,}06)^{2} = 28.090$ dh
Trimestrielle	4	3%	$25.000\,(1+0{,}03)^{4} = 28.137{,}72$ dh
Mensuelle	12	1%	$25.000\,(1+0{,}01)^{12} = 28.170{,}62$ dh

4. Taux proportionnels et taux équivalents:

4.1. Taux proportionnels:

Exercice 2 :

Soit C_0 = 100.000 dh, placé pendant un an à 9%.

Calculez la valeur acquise par ce capital, au bout d'une année, en considérant les intérêts produits par an, par semestre, par trimestre.

$$Va = 100.000 * (1+0,09)^1 = 109.000 \text{ dh}$$

$$Va = 100.000 * (1+0,045)^2 = 109.202,5 \text{ dh}$$

$$Va = 100.000 * (1+0,0225)^4 = 109.308,33 \text{ dh}$$

4. Taux proportionnels et taux équivalents:

4.2. Taux équivalents:

Deux taux sont équivalents lorsqu'à I.C, ils aboutissent pour un même capital à la même Va pendant la même durée de placement.

Exemple:

- **un capital de 10.000 dh placé au taux de 10%, à une durée d'un an.**
- **Au bout d'une année la Va = 10.000 $(1,10)^1$ = 11.000 dh**
- **Si is est le taux semestriel équivalent, alors:**

$$10.000\,(1+is)^2 = 10.000\,(1,10)^1$$

$$(1+is) = (1,10)^{1/2}$$

$$is = 0,0488088 \quad \text{soit } ts = 4,88\%$$

4. Taux proportionnels et taux équivalents:

4.2. Taux équivalents:

Généralisons:

Deux placements définis respectivement par leur taux (i1 et i2) et par leurs périodes (p1 et p2). Les placements sont effectués à taux équivalents s'ils aboutissent, pour un même capital, à la même Va.

$$C(1+i_1)^{p1} = C(1+i_2)^{p2}$$

$$(1+i_1) = (1+i_2)^{p2/p1}$$

$$i_1 = (1+i_2)^{p2/p1} - 1 \quad \text{et} \quad i_2 = (1+i_1)^{p1/p2} - 1$$

4. Taux proportionnels et taux équivalents:

4.2. Taux équivalents:

Exercices:

1. Quel est le taux semestriel équivalent au taux annuel de 9%?

$$C(1+0,09)^{n} = C(1+ts)^{2n}$$

$$(1+0,09) = (1+ts)^{2}$$

$$(1+ts) = (1+0,09)^{1/2}$$

$$ts = (1+0,09)^{1/2} - 1$$

$$ts = 4,4\%$$

4. Taux proportionnels et taux équivalents:

4.2. Taux équivalents:

2. Quel est le taux trimestriel équivalent à un taux annuel de 9%?

$$P_2 = 4n$$

$$(1+i_t)^4 = 1{,}09$$

$$i_t = (1{,}09)^{1/4} - 1$$

$$i_t = 2{,}18\%$$

4. Taux proportionnels et taux équivalents:

4.2. Taux équivalents:

4. Soit un capital de 25.000 dh placé au taux annuel d'I.C de 12% pendant une année. Calculez la valeur acquise par ce capital, au bout d'une année, en considérant les intérêts produits par an, par semestre, par trimestre et par mois avec des taux équivalents.

4. Taux proportionnels et taux équivalents:

Corrigé à taux équivalents:

Durées de capitalisation	Nombre de périodes	taux	Va au bout d'une année
Annuelle	1	12%	$25.000\ (1+0,12)^{1} = 28.000$ dh
Semestrielle	2	5,8%	$25.000\ (1+0,058)^{2} = 28.000$ dh
Trimestrielle	4	2,87%	$25.000\ (1+0,0287)^{4} = 28.000$ dh
Mensuelle	12	0,95%	$25.000\ (1+0,0095)^{12} = 28.000$ dh

4. Taux proportionnels et taux équivalents:

Corrigé à taux proportionnels:

Durées de capitalisation	Nombre de périodes	taux	Va au bout d'une année
Annuelle	1	12%	$25.000\ (1+0,12)^1 = 28.000$ dh
Semestrielle	2	6%	$25.000\ (1+0,06)^2 = 28.090$ dh
Trimestrielle	4	3%	$25.000\ (1+0,03)^4 = 28.137,72$ dh
Mensuelle	12	1%	$25.000\ (1+0,01)^{12} = 28.170,62$ dh

5. Evaluation d'un capital à une date donnée

Un capital C payable à l'époque 'n' peut être facilement évalué à n'importe quelle autre période 'p'.

à 'n' : $C_n = C_0\ (1+i)^n$
à 'p' : $C_p = C_0\ (1+i)^p$
à '-n' : $C_{-n} = C_0\ (1+i)^{-n}$

Peut-on évaluer à 'p', un capital dont on connait la valeur à 'n'?

5. Evaluation d'un capital à une date donnée

On sait que: $C_n = C_0 \, (1+i)^n$

et $C_0 = C_n \, (1+i)^{-n}$

et $C_p = C_0 \, (1+i)^p$

Donc: (je remplace C_0 par sa valeur)

$C_p = C_n \, (1+i)^{-n} \, (1+i)^p$

$C_p = C_n \, (1+i)^{-n+p}$

5. Evaluation d'un capital à une date donnée

Exercice:

Une personne doit régler 75.000 dh dans 4 ans. Combien paierait-elle si elle réglait sa dette:

- **Dans 2 ans**
- **Dans 7 ans**

I.C au taux de 11,5%

5. Evaluation d'un capital à une date donnée

1. Dans 2 ans:

$$C_2 = 75.000\ (1{,}115)^{-(4-2)}$$
$$= 75.000\ (1{,}115)^{-2}$$
$$= 60.326{,}98 \text{ dh}$$

2. Dans 7 ans:

$$C_7 = 75.000\ (1{,}115)^{-(4-7)}$$
$$= 75.000\ (1{,}115)^{3}$$
$$= 103.964{,}69 \text{ dh}$$

Chapitre IV :
Les annuités

1. Définition

On appelle annuités une suite de versements effectués à intervalles égaux. Les sommes sont versées chaque année à la même date. L'intervalle qui sépare deux versements consécutifs est la période.

La période retenue est l'année, mais on peut effectuer des paiements semestriels, trimestriels ou mensuels ; on parle donc de semestrialités, trimestrialités ou mensualités.

Définition

Les annuités peuvent être constantes ou variables. Le versement d'annuités peut avoir comme objectif, soit :

- La constitution d'un capital dans le futur, (ex. capital retraite, capital éducation…) dans ce cas on parle de **valeur acquise**.
- Le remboursement d'un prêt, on parle de **valeur actuelle.**

Définition

Dans le cadre des annuités, il s'agit de calculer soit :

- La valeur acquise, à une date quelconque, de l'ensemble des annuités.
- La valeur actuelle, à la date d'aujourd'hui, de l'ensemble d'une série d'annuités.

Exemple :

On verse en vue de constituer un capital, trois annuités:

01/01/2014 : 6500 DH

01/01/2015 : 4300 DH

01/01/2016 : 8600 DH

Quel sera le capital constitué au 01/01/2018 au taux de 2,25%?

$$Va = 6500(1+0,0225)^4 + 4300(1+0,0225)^3 + 8600(1+0,0225)^2$$
$$= 20.693,28 \text{ DH}$$

2. Annuités constantes en fin de période :

2.1. Valeur acquise d’annuités constante en fin de période:

La valeur acquise d’une série d’annuités est la somme des valeurs acquises, à la fin de la dernière période, de toutes les annuités constituant cette série.

Dans ce cas, les sommes sont payables à la fin de chaque période, le début de la première période est appelé origine de la suite d’annuités.

					An
	a	a	a		a
0	1	2	3	…………………	n

2.1. Valeur acquise d’annuités constante en fin de période:

Soient :

a : le montant de l’annuité constante

i : le taux d’intérêt correspondant à la période retenue

n : le nombre d’annuités

An : la valeur acquise au moment du versement de la dernière annuité.

Il s’agit de la somme des valeurs acquises par chacun des versements

2.1. Valeur acquise d'annuités constante en fin de période:

Versement	Valeur acquise
1	$a\,(1+i)^{n-1}$
2	$a\,(1+i)^{n-2}$
…	…
n-2	$a\,(1+i)^{2}$
n-1	$a\,(1+i)$
n	a

2.1. Valeur acquise d'annuités constante en fin de période:

Donc : $A_n = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + \ldots\ldots + a(1+i)^{n-1}$

$= a[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots\ldots + (1+i)^{n-1}]$

$$\mathbf{A_n = a * \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

2.1. Valeur acquise d'annuités constante en fin de période:

Exercice 1 :

Calculer la valeur acquise, au moment du dernier versement, par une suite de 12 annuités de 25.000 dh chacune. Taux : 10% l'an.

$$A_{12} = 25.000 * \frac{(1.1^{12} - 1)}{0.1} = 534.607,09 \text{ Dh}$$

2.1. Valeur acquise d'annuités constante en fin de période:

Exercice 2 :

Calculer la valeur acquise au moment du dernier versement par une suite de 15 annuités constantes de fin de période de 28.500 dh chacune. Capitalisation de 9% l'an. Ainsi que l'intérêt produit.

$$A15 = 28.500 * \frac{(1+0.09)^{15} - 1}{0.09} = 836.786,11 \text{ dh}$$

Le capital versé est 28.500 * 15 = 427.500 dh

Intérêt = An – capital versé = 836.786,11– 427.500 = dh

2.1. Valeur acquise d'annuités constante en fin de période:

Exercice 3 :

Combien faut-il verser à la fin de chaque semestre pendant 6 ans, pour constituer, au moment du dernier versement, un capital de 250.000 dh. Taux semestriel : 4,5%

$$A_n = a * \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \text{alors} \quad a = A_n * \frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad a = 16.166,54$$

2.1. Valeur acquise d'annuités constante en fin de période:

Exercice 4 :

Par le versement de 10 annuités de 18.000 dh chacune, on constitue, au moment du versement du 10ème terme, un capital de 300.000 dh. Trouver le taux de capitalisation.

$$300.000 = 18.000 * \frac{(1+i)^{10} - 1}{i} \quad \text{donc :} \quad \frac{(1+i)^{10} - 1}{i} = 16,6667$$

$$t = 10,93\%$$

2.2. Valeur actuelle d'annuités constante en fin de période:

La valeur actuelle est la valeur à la date d'aujourd'hui. La valeur actuelle d'une série d'annuités est la somme des valeurs actuelles de toutes les annuités constituant cette série.

A0	a	a	a		a
0	1	2	3	………………	n

2.2. Valeur actuelle d'annuités constante en fin de période:

On cherche à évaluer la suite d'annuités à la date 0.

A la date 'n' on a : $An = a * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

A la date 0 on aura : $A0 = An * (1+i)^{-n}$

$$= a * \frac{(1+i)^n - 1}{i} * (1+i)^{-n}$$

Donc la formule d'actualisation est la suivante :

$$A0 = a * \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Remarque : on applique cette formule lorsqu'on se situe une période avant le premier versement.

2.2. Valeur actuelle d'annuités constante en fin de période:

Exercice 1 :

Calculer la valeur à l'origine d'une suite de 13 annuités de 12.000 dh chacune. Taux d'intérêt : 9,5% l'an.

$$A0 = 12.000 * \frac{1-(1,095)^{-13}}{0,095}$$

$$= 87.494,13 \text{ dh}$$

Les intérêts versés lors de cette opération :

$$I = (13 * 12.000) - 87.494,13 = 68.505,87 \text{ dh}$$

2.2. Valeur actuelle d'annuités constante en fin de période:

Exercice 2 :

Combien faut-il payer à la fin de chaque année de l'emprunt pour rembourser une dette de 150.000 dh, par le versement de 8 annuités constantes ?

Taux d'intérêt : 11% l'an.

$$A0 = a * \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad \text{Donc : } a = A0 * \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$a = 150.000 * \frac{0,11}{1-(1,11)^{-8}} = 29.148,15 \text{ dh}$$

2.2. Valeur actuelle d'annuités constante en fin de période:

Exercice 3:

Sachant que la somme placé pendant 5 ans est de 2500dh à la fin de chaque année. Quel est le taux d'intérêt si la valeur actuelle de ses placements est de 10.823,69 dh?

$$A0 = a * \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\text{Donc } A0/a = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 10.823,69 / 2500$$

$$= 4,329476$$

$$t = 5\%$$

Exercice: Valeur acquise en fin de période

- Un capital de 300.000 dh doit être constitué 2 ans après le dernier terme par le versement de 10 annuités cst.
- Taux =9,5% l'an. Calculer a.

$$300.000 = a * \frac{(1+0,095)^{10} - 1}{0,095} * (1+0,095)^{2}$$

$$a = 300.000 * \frac{0,095}{(1+0,095)^{10} - 1} * (1+0,095)^{-2}$$

a = 16.079,6 Dh

3. Annuités constantes de début de période :

Les versements ont lieu au début de chaque période. L'étude des annuités de début de période ne diffère pas beaucoup de celle de fin de période. En effet par un simple changement d'origine on se ramène au schéma des annuités de fin de période.

3. Annuités constantes de début de période :

Fin de période :

	a	**a**	**a**	**a**	**a**
0	**1**	**2**	**3 ……..….n-1**		**n**

Début de période :

a	**a**	**a**	**a**	**a**	
0	**1**	**2**	**3………n-1**		**n**

Il importe donc, au niveau des formules, de prendre en considération le décalage d’une période

3. Annuités constantes de début de période :

3.1. Valeur acquise :

Ici, on se situe une période après le dernier versement :

$$Va = a * \frac{(1+i)^n - 1}{i} * (1+i)$$

3. Annuités constantes de début de période :

3.1. Valeur acquise :

Exemple :

Calculer le capital constitué un an après le dernier versement, par une suite de 10 annuités de 35.000 dh chacune. Taux : 10% l'an.

$$V10 = 35.000 * \frac{(1,1)^{10} - 1}{0,1} * (1,1) = 613.590,84 \text{ dh}$$

3. Annuités constantes de début de période :

Exemple :

Combien doit-on effectuer de versements égaux à 2600 dh, effectués au début de chaque semestre pour avoir une Va = 24.292,09 dh.

Taux annuel = 7%

3. Annuités constantes de début de période :

3.1. Valeur acquise :

Exemple :

Quelle doit être la valeur de 5 placements égaux effectués, au début de chaque trimestre pour avoir une valeur acquise de 40.000 dh, si le taux annuel est de 6%?

Il faudra d'abord calculer le taux d'intérêt de la période considérée (semestre).
Le taux d'intérêt semestriel équivalent au taux annuel de 6% est:
$1+ta = (1+ts)^2$
ts = 0,0295 = 2,95%

$$\mathbf{Va = a * \frac{(1+i)^n - 1}{i} * (1+i)}$$

$$\mathbf{a = 6521{,}26\ dh}$$

3. Annuités constantes de début de période :

3.2. Valeur actuelle :

Ici on se situe au moment du 1er versement :

$$A0 = a * \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} * (1+i)$$

3. Annuités constantes de début de période :

3.2. Valeur actuelle :

Exemple :

Calculer la valeur actuelle, au moment du versement du 1er terme, par une suite de 12 annuités de 25.000 dh chacune.

Taux d'intérêt : 11,5% l'an.

$$A0 = 25.000 * \frac{1-(1,115)^{-12}}{0,115} * (1,115) = \text{dh}$$

3. Annuités constantes de début de période :

3.2. Valeur actuelle :

Exemple :

Quelle est la valeur d'un placement effectué 7 fois, au début de chaque trimestre, pendant une année et demi, pour avoir une valeur actuelle de 14.750 dh si le taux d'intérêt annuel est de 9%?

$$t_t = (1,09)^{1/4} - 1 = 2,18\%$$

$$a = \frac{Va * t}{(1+t) * [1 - (1+t)^{-n}]} = 2245,89 \text{ dh}$$

Chapitre V :
Les emprunts indivis

Définition

L'emprunt indivis se caractérise par le fait que l'emprunteur (personne physique ou morale) s'adresse à un seul prêteur (le nominal C de la dette n'est pas divisé).

Lorsqu'il s'agit d'un grand nombre de prêteurs et un seul emprunteur, on parle d'emprunts obligataires (le nominal C de la dette est divisé en titres).

Définition

L’emprunteur du capital s’engage à s’acquitter de sa dette (capital et intérêt) de sorte que les sommes versées pour le remboursement soient équivalentes au capital emprunté majoré des intérêts dus.

Le remboursement d’un emprunt est composé de deux parties :

- L’amortissement qui est la somme destinée à rembourser au prêteur le capital emprunté ;
- L’intérêt qui est la somme destinée à rémunérer le prêteur pour le service de la dette.

Définition

L'emprunt indivis peut être remboursé de deux façons :

- Par annuités constantes ;
- Par amortissement constant.

1. Emprunt indivis remboursé par annuités constantes :

On considère une personne qui a emprunté à sa banque une somme d'argent C et qui s'engage à la rembourser par n annuités constantes.

$$C = a\,(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2} + a\,(1+t)^{-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a\,(1+t)^{-n}$$

$$C = a * \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \qquad \text{donc} \qquad a = \frac{C * t}{1-(1+t)^{-n}}$$

1. Emprunt indivis remboursé par annuités constantes :

La somme des annuités $S = n*a = \dfrac{n*C*t}{1-(1+t)^{-n}}$

L'intérêt global : $I = S - C = n*a - C$

$$I = \frac{n*C*t}{1-(1+t)^{-n}} - C = \frac{C\,(n*t)}{1-(1+t)^{-n}} - 1$$

1. Emprunt indivis remboursé par annuités constantes :

Exemple :

Une société ABC a emprunté 250.000 dh auprès de la banque à un taux de 11% et remboursable sur 5 ans par annuités constantes. Quelle est le montant de l'annuité ? Etablir le tableau d'amortissement.

C = 250.000 dh ; n = 5 ans ; t = 11%

1. Emprunt indivis remboursé par annuités constantes :

Règles de calcul :

•**On calcul l'annuité constante :**

$$a = \frac{C*t}{1-(1+t)^{-n}} = \frac{250.000 * 0,11}{1-(1+0,11)^{-5}} = 67.642,58 \text{ DH}$$

• **On calcul l'intérêt dû pour chaque période : Ik = Dk * t**

• **On calcul l'amortissement, pour chaque période, par différence entre l'annuité constante et l'intérêt de la période : mk = a – Ik**

1. Emprunt indivis remboursé par annuités constantes :

Période	Annuités	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Dette au début de période
k	ak = a	Ik	Mk	Dk
0				250.000
1	67642,58	27500,00	40142,58	209857,42
2	67642,58	23084,32	44558,26	165299,16
3	67642,58	18182,91	49459,67	115839,48
4	67642,58	12742,34	54900,24	60939,25
5	67642,58	6703,32	60939,26	0,00
Total	338212,9	88212,88	250000,02	551935,31

2. Emprunt indivis remboursé par amortissements constants :

- Dans ce cas, l'amortissement est réparti de façon égale sur l'ensemble des périodes : **$m = C / n$**

- L'annuité est obtenue par la somme de l'intérêt de la période et de l'amortissement constant, puisque l'intérêt baisse d'une période à l'autre, l'annuité sera donc en diminution.

2. Emprunt indivis remboursé par amortissements constants :

Exemple :

Un emprunt de 100.000 dh est remboursable en 5 ans selon le système des amortissements constants, dresser le tableau d’amortissement de cet emprunt si le taux d’intérêt annuel est de 10%.

Le capital emprunté : C = 100.000 dh ;
La durée de prêt : n = 5 ans ;
Taux d’intérêt annuel : t = 10%.

Comme l’amortissement est constant, on a : m = 100.000 / 5
= 20.000 dh

2. Emprunt indivis remboursé par amortissements constants :

Règles de calcul :

- On calcule d'abord l'amortissement constant : $m = 20.000$ dh
- On calcul l'intérêt dû pour chaque période : $I_k = D_k * t$
- On calcul l'annuité : $a_k = m + I_k$

2. Emprunt indivis remboursé par amortissements constants :

- Le tableau d'amortissement se présente comme suit :

Période	Dette au début de période	Intérêt de la période	Amortissement de la période	Annuité versée en fin de période
k	Dk	Ik	mk	Ak
1	100 000	10 000	20 000	30 000
2	80 000	8 000	20 000	28 000
3	60 000	6 000	20 000	26 000
4	40 000	4 000	20 000	24 000
5	20 000	2 000	20 000	22 000

Exercices d’application :

I.

Un prêt de 600.000 dh est consenti le 1 janvier 2014, au taux de 10% l’an, pour financer un investissement. Le remboursement s’effectue par annuités constantes de fin de période, la dernière annuité échéant le 31 décembre 2019.

Calculez le montant de l’annuité et dresser le tableau d’amortissement de l’emprunt.

a = 137.764,43 dh

Exercices d’application :

II.

Un emprunt de 50.000 dh est remboursé, en 5 annuités, à amortissements constants. Dresser le tableau d’amortissement de cet emprunt, si le taux d’intérêt annuel est de 7,5%

Révision :

Un emprunt de 450.000 dh est remboursable en 6 annuités constantes. La première est payable dans un an, taux égal à 12% l'an.

1. **Calculer l'annuité de remboursement**
2. **Établir le tableau d'amortissement de l'emprunt considéré**
3. **Déterminer le montant de la dette 3 mois après le versement de la quatrième annuité.**